SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

# ALCUNI RISULTATI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEGENERI

3-10 MARZO 1983

## 1. INTRODUZIONE

La teoria delle equazioni differenziali degeneri (equazioni implicite) ha avuto notevoli sviluppi negli ultimi anni, tanto che sono disponibili esposizioni abbastanza dettagliate su certe direzioni che ha assunto la ricerca. Si veda, ad esempio, il testo di Carrol-Showalter.

In questo Seminario, ho intenzione di esporre la presentazione di Showalter [4] relativamente al problema del 1° ordine

$$(1)\qquad \begin{aligned} &Mu'(t) + Lu(t) = f(t),\ t > 0,\\ &u(0) = u_0; \end{aligned}$$

passerò poi a raccontare i risultati di S.L. Campbell sul problema (1) in dimensione finita, e farò infine vedere che questi ultimi si possono dedurre dalla teoria che io ho sviluppato per operatori in spazi di Banach.

Per esporre la presentazione di Showalter, credo sia opportuno richiamare alcuni risultati, che credo d'altra parte, noti, ma che motivano anche le successive ipotesi per la trattazione di (1).

## 2. PRELIMINARI

Def. 1. Un operatore lineare A in uno spazio di Hilbert complesso H è detto ACCRETIVO se $\mathrm{Re}(Ax,x)_H \geq 0$ $\forall x \in D(A)$ {= Dominio di A}.

Teorema 1. Un operatore lineare B: $D(B)$ $(\subseteq H) \to H$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo di operatori nello spazio di Hilbert H se e solo se D(B) è denso in H e $\lambda$-B ha inverso limitato $\forall \lambda \in R^+$ soddisfante $\| \lambda(\lambda - B)^{-1} \|_{L(H)} \leq 1$.

Il successivo risultato chiarisce l'importanza degli operatori accretivi:

Teorema 2. L'operatore lineare $-A: D(A) \to H$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazioni in H se e solo se D(A) è denso in H, A è ACCRETIVO e $\lambda + A$ è suriettivo per un $\lambda > 0$.

Diamo alcuni esempi, utili anche per la successiva esposizione del caso degenere.

Esempio 1. Sia $H = L^2(0,1)$, $c \in \mathbb{C}$, $D(A) = \{u \in H'(0,1): u(0) = cu(1)\}$, $A = \partial$, dove $\partial$ denota la derivata nel senso delle distribuzioni.

Allora, $\forall u \in H'(0,1)$,

$$2 \operatorname{Re} (Au,u)_H = \int_0^1 (\partial u \cdot \bar{u} + \partial \bar{u} \cdot u) = |u(1)|^2 - |u(0)|^2,$$

e così A è accretivo se e solo se $|c| \leq 1$. Segue che $-A$ genera un semigruppo di contrazioni in $L^2(0,1)$ se e solo se $I + A$ è suriettivo. D'altra parte, ciò segue dalla risolubilità del problema

$$\partial u + u = f, \quad u(0) = cu(1), \quad f \in L^2(0,1).$$

Infatti, tale u è data da

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s)\, f(s)\, ds,$$

essendo

$$G(x,s)=\begin{cases}[e/(e-c)]\ e^{-(x-s)}, & 0 \leqq s < x \leqq 1,\\[2mm] [c/(e-c)]\ e^{-(x-s)}, & 0 \leqq x < s \leqq 1\end{cases}$$

Si può anzi vedere che $-A$ genera un gruppo di operatori.

Esempio 2. Sia $H = L^2(0,1)$, $A = -\partial^2$ su $D(A) = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$. Integrando per parti, si ottiene

$$(Au, u)_H = \int_0^1 |\partial u|^2, \quad u \in D(A),$$

e così A è accredivo. La risolubilità del problema ai limiti

$$u - \partial^2 u = f, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

$\forall f \in L^2(0,1)$ mostra che $I + A$ è su $H$.

Esempio 3. Siano $V$, $H$ spazi di Hilbert complessi, con immersione $V \hookrightarrow H$ continua e densa.

Sia $a: V \times V \to \mathbf{C}$ una forma sesquilineare continua e V-ellittica ($\mathrm{Re}\, a(u,u) \geqq c\, \|u\|_V^2$, $c > 0$). Si pone

$$D(A) = \{u \in V: \ |a(u,v)| \leqq K_u\ |v|_H, \ v \in V\},$$

$$(Au,v)_H = a(u,v), \ u \in D(A), \ v \in V.$$

Allora $D(A)$ è denso in $H$ e c'è un $\theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/4$ tale che $\forall \lambda \in S(\pi/2 + \theta_0) = \{z \in \ : |\arg z| < \pi/2 + \theta_0\}$, esiste $(\lambda + A)^{-1} \in L(H)$. Inoltre, $\forall \theta$, $0 < \theta < \theta_0$ esiste $M_\theta > 0$ tale che

$$\| \lambda(\lambda + A)^{-1} \|_{L(H)} \leqq M_\theta, \quad \forall \lambda \in S(\theta + \pi/2).$$

L'operatore $-A$ risulta quindi il generatore di un semigruppo di contrazioni su H. In più, tale semigruppo ha una estensione analitica in $S(\theta_o)$. Si dice che il semigruppo generato da $-A$ è analitico o olomorfo.

I due seguenti Teoremi permettono di capire il legame fra semigruppo ed equazioni lineari.

Teorema 3. Sia $-A$ il generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazioni in H.

Allora $\forall u_o \in D(A)$ e $\forall f \in C^1([0,\infty),H)$ c'è una unica $u \in C^1([0,\infty), H)$ tale che

$$u(t) \in D(A), \quad \forall t \geq 0,$$
$$u(o) = u_o,$$
$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Se $T(t)$ denota il semigruppo generato da $-A$, riesce

$$u(t) = T(t)u_o + \int_0^t T(t-s)\, f\,(s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Teorema 4. Sia $-A$ il generatore di un semigruppo analitico in H. Allora $\forall u_o \in H$ e ogni $f\colon [0,+\infty) \to H$ hölderiana ($\|f(t) - f(s)\|_H \leq K|t-s|^\alpha$, $t, s \in R^+ \cup \{o\}$, $0 < \alpha \leq 1$) c'è una unica $u \in C([0,\infty), H) \cap C'((0,\infty),H)$ tale che $u(0) = u_o$, $u(t) \in D(A)$ $\forall\, t \in R^+$ e $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $t \in R^+$.

## 3. EQUAZIONI REGOLARI

E' ben noto che se $(V; (\,,\,))$ è uno spazio di Hilbert, il suo antiduale $V'$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con V mediante la "Riesz map" $M$: $M\,x(y) = (x,y)$.

In questo paragrafo tratteremo la equazione (1) sotto l'ipotesi che M sia la "Riesz map" da $V_m$ a $V_m'$, dove $V_m$ è uno spazio di Hilbert con prodotto interno $( \, , \, )_m$ cioè

$$M\,x\,(y) = (x,y)_m, \quad x,y \in V_m$$

Se D è un sottospazio di $V_m$ e $L : D \to V_m'$ lineare, siamo così interessati a risolvere il seguente problema:

Dati $u_0 \in V_m$, $f \in C([0,\infty);\, V_m')$, trovare $u \in C([0,\infty);\, V_m) \cap C^1((0,\infty);\, V_m)$ tali che

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &Mu'(t) + Lu(t) = f(t), \quad t \in R^+, \\ &u(0) = u_o. \end{aligned}$$

STIMA A PRIORI per una soluzione u(.) di (2), con $f \equiv 0$.

Poiché $(u,v)_m = M\,u(v)$, $\frac{d}{dt}(u(t),\, u(t))_m = 2\,\mathrm{Re}(u'(t),\, u(t))_m =$
$= 2\,\mathrm{Re}\; Mu'(t)\,(u(t)) = -\,2\,\mathrm{Re}\; Lu(t)\,(u(t))$,

ciò suggerisce la seguente

<u>Def. 1</u>. Un operatore lineare $L : D \to V_m'$, D sottospazio di $V_m$, è MONOTONO (non negativo) se

$$\mathrm{Re}\; Lx(x) \geq 0 \quad \forall x \in D.$$

L si dice *strettamente monotono* (positivo) se

$$\mathrm{Re}\; Lx(x) > 0 \quad \forall x \in D,\ x \neq 0.$$

Segue che se L è monotono, (2) ha al più una soluzione; ciò suggerisce anche che $V_m$ è lo spazio corretto in cui porre il problema. Infatti, essendo $M$ un isomorfismo, (2) è equivalente a

$$(3) \qquad \begin{aligned} &u'(t) + M^{-1} Lu(t) = M^{-1} f(t), \quad t > 0 \\ &u(0) = u_o \end{aligned}$$

Posti $A = M^{-1} \circ L$, $D(A) = D$, risulta

$$(Ax,y)_m = (M^{-1}(L(x)), y)_m = Lx\,(y), \; x \in D, \; u \in V_m$$

e quindi L è monotono se e solo se A è *accretivo*. Pertanto, (cfr. Teorema 1.2) -A genera un semigruppo di contrazioni in $V_m$ se e solo se D è denso in $V_m$, L è monotono e I + A è suriettivo. D'altra parte, $M(I+A) = M + L$. Così (Teorema 1.3).

Teorema 1. Sia $U$ la "Riesz map" di $(V_m, (\ ,\ )_m)$ e sia L lineare dal sottospazio D di $V_m$ a $V_m'$. Se L è monotono, ha dominio denso e $M + L : D \to V_m'$ è suriettivo, allora per ogni $f \in C^{(1)}([0,+\infty); V_m')$ e $u_o \in D$ c'è una unica soluzione $u(\cdot)$ di (2).

Vogliamo ora descrivere l'analogo del caso analitico (Teorema 1.4).

Sia dunque V uno spazio di Hilbert immerso densamente e con continuità in $V_m$, per cui vale così l'immersione $V_m' \subsetneq V'$. Sia $\ell(\cdot,\cdot)$ una forma sesquilineare e V-ellittica continua su V x V e sia $L: V \to V'$,
$L\,x\,(y) = \ell\,(x,y)$, $x,y \in V$.
Posto $D = \{x \in V;\ L\,x \in V_m'\}$, $L = L/_D$, dal fatto che
$(Ax,y)_m = Lx(y)$, segue $\ell(x,y) = (Ax, y)_m$, $x \in D$, $y \in V$ e quindi A è l'operatore determinato dalla terna $(\ell(\cdot,\cdot), V, V_m)$. Pertanto, in forza del Teo

rema 1.4 abbiamo

Teorema 2. Sia $M$ la "Riesz map" di $(V_m, (\ ,\ )_m)$. Sia poi $\ell(\cdot,\cdot)$ una forma sesquilineare continua e V-ellittica, dove V è uno spazio di Hilbert densamente immerso con continuità in $V_m$. Sia $L$ il corrispondente isomorfismo da V a V'.

Allora per ogni $f: [0,\infty) \to V_m'$ Hölder continua (di esponente $0 < \alpha \leq 1$) e ogni $u_0 \in V_m$, c'è una unica $u \in C([0,\infty), V_m) \cap C^1((0,\infty), V_m)$ tale che $Lu(t) \in V_m'$ $\forall t > 0$ e

$$M\ u'(t) + Lu(t) = f\ (t),\quad t \in R^+.$$

Diamo ora alcuni esempi elementari per suggerire i tipi di problemi a cui i risultati precedenti possono essere applicati.

Nei primi tre esempi, $V_m = H_0^1\ (0,1)$ con

$$(u,\ v)_m = \int_0^1 (u\bar{v} + a\ \partial u\ \partial\bar{v}),$$

essendo $a > 0$.

Esempio 1. Sia $D = \{u \in H^2(0,1) \cap H_0^1\ (0,1): u'(0) = cu'(1)\}$, $|c|<1$ e sia $Lu = -\partial^3 u$. Allora

$$\forall \phi \in H_0^{\ 1}(0,1) \qquad Lu(\phi) = (\partial^2 u,\ \partial\phi) \text{ e così}$$

$$2 \text{ Re } Lu(u) = |u'(1)|^2 - |u'(0)|^2 \geq 0,\quad u \in D.$$

Così il Teorema 1 ci dice che il problema

$$(\partial_t - a\,\partial_x^2\,\partial_t)\,U\,(x,t) - \partial_x^3\,U\,(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t \geq 0,$$

$$U(0,t) = U(1,t) = 0,\ \partial_x U(o,t) = c\partial_x U(1,t), \quad t \geq 0,$$

$$U(x,0) = U_o(x),$$

ha una unica soluzione $\forall U_o \in D$.

Esempio 2. Sia $V = H_o^2\,(0,1)$ e

$$(u,v) = \int_0^1 \partial^2 u\,.\,\partial^2\,\bar{v},\ u,\ v \in V.$$

Allora $D = H_o^2\,(0,1) \cap H^3(0,1)$ e $Lu = \partial^4 u,\ u \in D$.

Il Teorema 2 assicura allora esistenza e unicità di una soluzione del problema

$$(\partial_t - a\partial_x^2\,\partial_t)\,U\,(x,t) + \partial_x^4\,U\,(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$U(0,t) = U(1,t) = \partial_x U\,(0,t) = \partial_x U\,(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$U\,(x,0) = U_o(x), \quad 0 < x < 1,$$

per ogni $U_o \in H_0^1\,(0,1)$.

Esempio 3 Sia $V = H_o^1\,(0,1)$ e sia

$$\ell(u,v) = \int_0^1 \partial u \partial \bar{v},\ u,\ v \in V.$$

Allora $D = V = V_m$ e $Lu = -\partial^2 u,\ u \in D$. Pertanto si ottiene esistenza e unicità di una soluzione del problema

$$(\partial_t - a\partial_x^2 \partial_t) U(x,t) - \partial_x^2 U(x,t) = 0, \quad 0<x<1, \; t>0,$$

$$U(o,t) = U(1,t) = 0, \; t>0,$$

$$U(x,0) = U_o(x), \; 0<x<1,$$

per ogni $U_o \in D = V_m = H_o^1(0,1)$.

Esempio 4. Come $V_m$ prendiamo il completamento di $C_o^\infty(\Omega)$ rispetto al prodotto scalare

$$(u,v)_m = \int_\Omega m(x)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx.$$

Assumiamo che $\Omega$ è un aperto di $R^n$, $m \in L^\infty(G)$ soddisfa $m(x) > 0$ q.d. su $\Omega$ e quindi $V_m$ è l'insieme delle funzioni misurabili u su $\Omega$ tali che $m^{1/2}$ . $u \in L^2(\Omega)$.
Posto $V = H_o^1(\Omega)$, si definisce

$$\ell(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v}, \quad u, v \in V.$$

Così il Teorema 2 assicura esistenza ed unicità di una soluzione del problema

$$m(x)\, \partial_t U(x,t) - \Delta_n U(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \; t>0,$$

$$U(s,t) = 0, \; s \in \partial\Omega, \; t>0,$$

$$U(x,0) = U_o(x), \; x \in \Omega,$$

dove naturalmente la condizione iniziale, per la scelta di $V_m$, significa:

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_\Omega m(x)|U(x,t) - U_o(x)|^2 \, dx = 0$$

Faccio notare che risultati più generali dell'Esempio 4 sono stati ottenuti anche in ambito $L^p$, $p \neq 2$, e con tecniche diverse, da me.

Osservazione. Nei primi due esempi, $M$ e $L$ sono operatori differenziali, e l'ordine di $L$ è strettamente maggiore di quello di $M$.

L'equazione dell'Esempio 2 si dice metaparabolica, quella dell'Esempio 3, pseudo-parabolica. L'equazione nell'Esempio 4 è debolmente degenere ($m(x) > 0$ q.d. su $\Omega$). Vedremo come studiare l'analogo problema in cui si assume solo che $m(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$. Si ottiene così un'equazione di tipo MISTO, parabolica dove $m(x) > 0$, ellittica dove $m(x) = 0$.

## 4. EQUAZIONI DEGENERI

Consideriamo ora l'equazione (2) permettendo a $M$ di degenerare, cioè, di annullarsi in un vettore non nullo.

Il metodo consiste nel passare al quoziente modulo lo spazio nullo di $M$, sperando di ottenere un problema regolare ma equivalente. Ciò naturalmente non sarà sempre possibile; $L$ dovrà "mantenere", in un certo senso, la singolarità di $M$.

Sia dunque $V$ uno spazio vettoriale e sia $m(\cdot,\cdot)$ una forma sesquilineare su $V$, simmetrica e non negativa. Quindi $|m(x,y)|^2 \leq m(x,x) \cdot m(y,y)$, $x,y \in V$. Pertanto $x \to m(x,x)^{1/2} = \|x\|_m$ è una seminorma su $V$.

Denotiamo con $V_m$ lo spazio seminormato $(V, \|\;\|_m)$. Sappiamo allora che $V'_m$ è uno spazio di Hilbert. Posto

$$M\, x(y) = m\,(x,y),\quad x.y \in V,$$

abbiamo un operatore $M \in \mathcal{L}(V_m, V'_m)$. Sia D un sottospazio vettoriale di V, e L sia lineare da D a $V'_m$, $f \in C([0,\infty), V'_m)$, $g_0 \in V'_m$.

Vogliamo considerare il problema di trovare $u(\cdot): [0,\infty) \to V$ tale che

(3) $$Mu(\cdot) \in C([0,\infty), V'_m) \cap C^1((0,\infty), V'_m),\quad (Mu)\,(0) = g_0,$$

$$u(t) \in D \;\forall\; t > 0$$

$$(Mu)'(t) + Lu(t) = f(t),\ t \in R^+.$$

Sia K il nucleo di $M$ e denotiamo con V/K il corrispondente spazio quoziente.

Sia q: V → V/K la corrispondente applicazione canonica (suriettiva). Posto

$$m_0(q(x), q(y)) = m(x,y),\ x,y \in V,$$

otteniamo un prodotto scalare su V/K, $m_0(\cdot,\cdot)$.

Il completamento di (V/K, $m_0(\cdot,\cdot)$) è uno spazio di Hilbert W il cui prodotto scalare verrà denotato ancora con $m_0(\cdot,\cdot)$.

Se vediamo q come operatore da $V_m$ a W, poiché conserva la norma e ha rango denso, il suo duale $q'$: $W' \to V'_m$ è un isomorfismo isometrico (si ricordi che $q'(f)(x) = f(q(x)$, $f \in W'$, $x \in V_m$).

Se quindi $M_0$ denota la "Riesz map" di (W, $m_0(\cdot,\cdot)$) abbiamo

$$q'(M_0\, q(x)(y) \;=\; M_0\, q(x)(q(y)) = m_0(q(x),\, q(y)) = Mx(y)$$

e così

(4) $\qquad q' M_0\, q = M\,.$

Sia $L : D \to V_m'$. Ci chiediamo se è possibile costruire un operatore lineare $L_0 : q(D) \to W'$ tale che

(5) $\qquad q' L_0 q = L$

Notiamo che se ciò è possibile, allora $x \in D \cap K$ implica $q(x) = 0 = [0]$ e quindi $L(x) = 0$, cioè, $x \in K(L)$, il nucleo di L. Dunque, $K \cap D$ è un sottospazio di $K(L)$. Ma vale anche l'implicazione inversa.

Infatti, se $K \cap D$ è un sottospazio di $K(L)$, si può considerare l'operatore $L_0 : q(D) \to W'$ dato che

$$L_0 q = (q')^{-1}\, L,$$

cioè $L_0 q(x) = (q')^{-1} L(x)$

Esso risulta infatti ben definito, perché, se $q(x) = q(y)$, con $x, y \in D$, abbiamo $x-y \in K$ e così $y = x+k, k \in K$.

Ma allora $k \in K \cap D$ e quindi $Lk = 0$ e dunque

$$Lx = Ly$$

Dunque, la definizione di $L_0$ è corretta.

Le (4) e (5), se assumiamo $K \cap D \subset K(L)$, permettono di trasformare (3) in un problema regolare.

Infatti, se $f(\cdot)$ e $g_0$ sono dati come in (3), consideriamo il problema di determinare una $v(\cdot) \in C([0,\infty), W) \cap C^{(1)}((0,\infty), W)$ tale che

$$M_o v'(t) + L_o v(t) = (q')^{-1} f(t),\ t > 0,$$

(6)

$$v(o) = (q' M_o)^{-1} g_o$$

Poiché $D(L_o) = q(D)$, se v è una soluzione di (6), allora per ogni $t \geq 0$ c'è $u(t) \in D$ tale che $v(t) = q(u(t))$.

Ma $q' M_o : W \to V_m'$ è un isomorfismo e quindi da (4), (5), (6) abbiamo che $u(\cdot)$ è una soluzione di (3) con $Mu(0) = g_o$. Cioè

Teorema 1. Sia $V_m$ lo spazio seminormato ottenuto da una forma sesquilineare simmetrica e non negativa $m(\cdot,\cdot)$, e sia $M \in L(V_m, V_m')$ l'operatore definito da

$$(Mx)\ (y) = m(x,y), \quad x,y \in V_m.$$

Sia D un sottospazio di $V_m$ e sia $L:D \to V_m'$ lineare e monotono.

(a) Se $K(M) \cap D \subseteq K(L)$ e $M + L:D \to V_m'$ è suriettivo, allora $\forall f \in C^{(1)}([0,\infty), V_m')$ e $u_o \in D$ esiste una soluzione di (3) con $(Mu)\ (0) = Mu_o$.

(b) Se $K(M) \cap K(L) = \{0\}$, allora c'è al massimo una soluzione di (3).

Dimostrazione. L'esistenza di una soluzione segue dal Teorema 3.1 applicato a (6) se mostriamo che $L_o : q(D) \to W'$ è monotomo e $M_o + L_o$ è suriettivo.

Ora, $\mathrm{Re}\ L_o q(x)\ (q(x)) = \mathrm{Re}\ q' L_o\ (q(x))(x) = \mathrm{Re}\ Lx(x) \geq 0$ e così $L_o$ è monotomo. Inoltre,

$$q'(M_o + L_o) q(x) = (M + L)\ (x), \quad x \in D,$$

e così $M_o + L_o$ è suriettivo poiché tale è $M + L$.

Per stabilire (b), sia $u(\cdot)$ una soluzione di (3) con $f = 0$, $Mu(o) = 0$. Posto $v(t) = qu(t)$, $t \geqq 0$, risulta

$$D_t\, m_o(v(t), v(t)) = D_t m_o(qu(t), qu(t)) = D_t\, M_o(v(t))(v(t)) =$$

$$= 2 \operatorname{Re} M_o v'(t)\, (v(t)).$$

Poiché $\quad q'\, M_o q = M$, si ha

$$D_t\, m(u(t), u(t)) = 2 \operatorname{Re} (Mu)'(t)\, (u(t)) = -2\, Lu(t)\, (u(t)),$$

$$t \in R^+.$$

Ma L è monotono, e quindi

$$Mu(t)\, (u(t)) = 0 \quad \forall t \geqq 0$$

Ora, poiché

$$|m(u(t), v)| \leqq m(u(t), u(t))^{1/2}\, m\, (v,v)^{1/2} = 0,$$

abbiamo $Mu(t) = 0$ e anche $Lu(t) = 0$, $\forall t > 0$.
Dunque $u(t) \varepsilon K(M) \cap K(L) = \{0\}$ e $u(t) = 0$, $\forall t \geqq 0$.
Il teorema è così completamente provato.

Vogliamo notare esplicitamente che per la validità di tutto il ragionamento è essenziale la simmetria di $m(\cdot,\cdot)$. E questa è una restrizione notevole.

La versione analitica del Teorema 1 è la seguente:

Teorema 2. Siano $V_m$, $m(\cdot,\cdot)$, $M$ come nell'enunciato del Teorema 1. Se $V$ è uno spazio di Hilbert immerso con continuità e densamente in $V_m$, sia $\ell(\cdot,\cdot)$ una forma ellittica, continua, sequilineare su $V$. Denotato con $L$ il corrispondente isomorfismo da $V$ su $V'$, sia

$$D = \{u \in V:\ Lu \in V'_m\}, \quad L = L/D.$$

Se $K(M) \cap D \subset K(L)$ $(= \{0\})$ e $T + L$ è suriettivo, allora per ogni $f: [0,\infty) \to V'_m$ Hölder-continua di esponente $0 < \alpha \leqq 1$ e ogni $u_0 \in V_m$ c'è una unica soluzione di (3) con $(Mu)(0) = Mu_0$.

Per illustrare concretamente i risultati di Teoremi 1 e 2, consideriamo i seguenti esempi:

Esempio 1 Posto $V_m = L^2(0,1)$, $0 \leqq a < b \leqq 1$, sia

$$m(u,v) = \int_a^b u(x)\, \overline{v(x)}\, dx, \quad u,v \in V_m$$

Allora $V'_m = L^2(a,b)$ è identificato con quel sottospazio di $L^2(0,1)$ i cui elementi sono zero q.d. su $(0,a) \cup (b,1)$, cosicché $M$ non è altro che la moltiplicazione per la funzione caratteristica dell'intervallo $(a,b)$.
Sia $L = \partial$ con dominio $D = \{u \in H^1(0,1):\ u(0) = cu(1),\ \partial u \in V'_m \subset L^2(0,1)\}$.

Se $|c| \leqq 1$ si è visto che $L$ è monotono. Ora, se $u \in D$, $u$ è costante su $(0,a) \cup (b,1)$ e così $K(M) \cap D = \{0\} \subset K(L)$.

Inoltre, $K(L) = \{0\}$ oppure consiste delle funzioni costanti, a seconda che $c \neq 1$ o $c = 1$, rispettivamente.

Pertanto, $K(M) \cap K(L) = \{0\}$.

Se $u$ è poi una soluzione di

$$u'(x) + \partial u(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = cu(b),$$

ed è estesa a $[0,a] \cup [b,1]$ ponendola costante su ciascuno degli intervalli, allora $(M + L)u = f \in V_m'$. Così, $M + L$ è su $V_m'$.

Dunque, il Teorema 1 assicura esistenza ed unicità di una soluzione generalizzata dal problema

$$\partial_t U(x,t) + \partial_x U(x,t) = F(x,t), \; a<x<b, \; t \geq 0,$$

$$\partial_x U(x,t) = 0, \quad x \in (0,a) \cup (b,1),$$

$$U(o,t) = cU(1,t), \quad t > 0,$$

$$U(x,0) = U_o(x), \; a < x < b,$$

per convenienti $F(\cdot,\cdot)$ e $U_o$.

Esempio 2. Sia $m_o(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ con $m_o(x) \geq o$ q.d. su $\Omega$, dove $\Omega$ è un aperto di $R^n$ con $\partial\Omega$ una varietà di classe $C^{(1)}$, $\Omega$ da una parte di $\partial\Omega$.

Sia $V_m = L^2(\Omega)$ e

$$m(u,v) = \int_\Omega m_o(x)\, u(x)\, \bar{v}(x)\, dx, \quad u,v \in L^2(\Omega).$$

Allora $M$ è la moltiplicazione per $m_o(.)$ e trasforma $L^2(\Omega)$ in $V_m' = \{ m_o \cdot g \; ; \; g \in L^2(\Omega)\}$.

Sia $\Gamma$ un sottoinsieme chiuso di $\partial\Omega$ e sia

$$V = \{v \in H^1(\Omega): \; \gamma_o v = 0 \text{ su } \Gamma\},$$

$\gamma_o$ è l'operatore di traccia. Definiamo:

$$\ell(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \,.\, \overline{\nabla v}\, dx, \quad u,\ v \in V,$$

e assumiamo che

$$\Sigma = \{s \in \partial\,\Omega : \nu_n(s) > 0\} \subset \Gamma.$$

Si può allora provare che $\ell(\cdot,\cdot)$ è V-ellittica e così $M + L$ è *su* V' e quindi anche su $V_m'$.

Allora il Teorema 2 mostra che se $U \in L^2(\Omega)$ e F soddisfa:

$$F(.,t) \in L^2(\Omega) \quad \forall t \in [0,T],\ \text{esiste } K \in L^2(\Omega),\ 0 < \alpha \leq 1,$$

$$|F(x,t) - F(x,\tau)| \leq K(x)\ |t-\tau|^{\alpha} \quad \text{q.d. su } \Omega\times[0,T],$$

allora c'è una unica soluzione generalizzata $U(\cdot,\cdot)$ del problema

$$\partial_t(m_o(x)\, U(x,t)) - \Delta_n U(x,t) = m_o(x)\ F\ (x,t),\ x \in \Omega,\ 0<t<T,$$

$$U(s,t) = 0\ \forall s \in \Gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}(s,t) = 0, \quad s \in \partial\Omega \setminus \Gamma,\ t \in R^{+},$$

$$m_o(x)\ (U(x,0) - U_o(x)) = 0.$$

Si noti che il valore iniziale $U(x,0)$ è prescritto solo su quei punti di $\Omega$ in cui l'equazione è parabolica.

Esempio 3. Altri problemi di tipo misto pseudoparabolico-parabolico possono essere trattati in modo analogo.

Per esempio, se $m_o(\cdot)$ è data come nell'Esempio 2,

$$m(u,v) = \int_\Omega \{u(x)\,\overline{v(x)} + m_o(x)\,\nabla u(x)\,\overline{\nabla v(x)}\}dx, \quad u,v \in V_m,$$

con $V_m = H^1(\Omega)$.

Poiché l'immersione $V_m \subsetneq L^2(\Omega)$ è continua, si può identificare $L^2(\Omega)$ con un sottospazio di $V'_m$.

Se $\ell(\cdot,\cdot)$ è definita come nell'<u>Esempio 2</u>, V essendo ora un sottospazio di $H^1(\Omega)$ contenente $C_o^\infty(\Omega)$, allora $K(M) = \{0\}$, $m(\cdot,\cdot) + \ell(\cdot,\cdot)$ è V-coerciva e così il <u>Teorema 2</u> si applica. In particolare, se $U_o \in L^2(\Omega)$ e F è opportuna, c'è una unica soluzione di

$$\partial_t(U(x,t) - \sum_{j=1}^n \partial_j\,(m_o(x)\,\partial_j U(x,t)) - \Delta_n\,U(x,t) = F(x,t),$$

$x \in \Omega,\ t > 0,$

$U(x,o) = U_o(x),\ x \in \Omega,$

con condizioni al contorno dipendenti dalla scelta di V.

Quanto finora esposto riguarda problemi degeneri che possono essere ricondotti alla teoria generali dei semigruppi; cioè ricondotti a "normali" equazioni di evoluzione.

Voglio ora accennare a certi risultati raggiunti da S.L. Campbell relativi all'equazione (1) in dimensione finita [1] e da me, (vedi [3]) negli spazi di Banach, quando 0 è un polo di $(M-\lambda)^{-1}$.

Prima, però, voglio ricordare che una esposizione di tecniche analoghe alle precedenti ma che possono adattarsi anche a problemi non lineari si trova nel libro di Carroll-Showalter [2].

## 5. APPLICAZIONE DELLA INVERSA SECONDO DRAZIN

Devo ricordare, per iniziare, alcune definizioni.

Def. 1. Se M è una matrice nxn di numeri complessi, l'indice di M = Ind(M) è il più piccolo intero non negativo k tale che

$$\text{rango }(M^k) = \text{rango }(M^{k+1})$$

Def. 2. Se M è una matrice nxn, l'inversa di Drazin di M, (D-inversa), denotata con $M^D$, è l'unica soluzione di

$$MX = XM, \quad XMX = X, \quad XM^{k+1} = M^k, \quad k = \text{Ind}(M).$$

La D-inversa di M esiste sempre ed è *unica*. Se P è non singolare, allora $(P^{-1}MP)^D = P^{-1}\, M^D P$. Pertanto, se M è singolare (e quindi $M = P^{-1} I_M\, P$, dove $I_M$ è la forma di Jordan per M,

$$I_M = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

con $\mathscr{C}$ non singolare e $N$ nilpotente, allora

$$M^D = P^{-1} \begin{bmatrix} \mathscr{C}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

La tecnica di Campbell consiste sostanzialmente nello spezzare (1) in una coppia di equazioni equivalenti a (1), la prima delle quali è regolare, mentre la seconda ha a che fare con matrici nilpotenti.

Egli utilizza in modo sostanziale il fatto che una matrice nxn M di indice k abbia una unica rappresentazione del tipo M = C + N, dove CN = NC = 0, N è nilpotente di indice k, Ind C = 0 o 1. Precisamente,

$$N = M(I-M^D M), \quad C = M^2 M^D,$$

e anche $M^D M$ riesce una proiezione.

Nell'ipotesi che M e L commutino, ML = LM, si vede senza troppe difficoltà, che posto $x_1 = M^D Mx$, $x_2 = (1-M^D M)x$, allora (1) diventa

(7) $$Cx_1' + Lx_1 = C^D Cf,$$

(8) $$Nx_2' + Lx_2 = (I-C^D C)f$$

Mentre (7) si dimostra essere regolare, problemi sorgono per la (8): infatti, se (8) ha soluzione, questa può non essere unica, o anche può non essere univocamente determinata dalle condizioni iniziali. Basta considerare

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tuttavia, vale

Teorema 1. Se ML = LM, allora per ogni $q \in \mathbf{C}^n$,

(9) $$e^{-M^D Lt} MM^D q$$

soddisfa l'equazione (1), con $f \equiv 0$, $t \in R$.

Resta da vedere se la (9) esaurisce tutte le soluzioni di (1), $f \equiv 0$. Ciò risulta vero se si assume una ulteriore condizione su M e L.

Cioè,

<u>Teorema 2</u>. Se $ML = LM$ e $N(M)\cap N(L) = \{0\}$, allora

$$t \to e^{-M^D L t} M M^D q, \quad q \in \mathbf{C}^n,$$

fornisce la soluzione generale dell'equazione omogenea (1).

Inoltre, se f è di classe $C^{(k)}$, la soluzione generale di (1) è

$$e^{-M^D L t} M M^D q + M^D e^{-M^D L t}\int_a^t e^{M^D L s} f(s)\, ds +$$
$$+ (1-MM^D)\sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (ML^D)^n L^D f^{(n)}(t),$$

dove $q\in\mathbf{C}^n$, $k = \mathrm{Ind}(M)$, e $a\in R$ è arbitrario.

Segue che sotto le ipotesi del <u>Teorema 2</u>, il problema (1) ha soluzione se e solo se

$$u_o = M^D M q + (I-MM^D)\sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (ML^D)^n L^D f^{(n)}(0), \; q\in\mathbf{C}^n.$$

In particolare, se $f \equiv 0$, il problema di Cauchy ha soluzione se e solo se $u_o = M^D Mq$. Ma allora

$$M^D M u_o = M^D M M^D M q = M^D M q = u_o.$$

Così, il problema di Cauchy ha soluzione se e solo se $M^D M u_o = u_o$.

Per togliere nel <u>Teorema 2</u> la condizione di commutatività su M e L, notiamo prima di tutto che se esiste l'inverso $(cM+L)^{-1}$ per almeno un $c\in\mathbf{C}$, allora $(cM+L)^{-1}M$ e $(cM+L)^{-1}L$ commutano. D'altra parte, sotto questa ipotesi, l'equazione in (1) riesce equivalente a

$$(cM+L)^{-1}\, Mu'(t) + (cM+L)^{-1}\, Lu(t) = (cM+L)^{-1}\, f(t), \quad t\in R;$$

risulta dunque equivalente ad una equazione del tipo

$$M_1u'(t) + L_1u(t) = h(t), \quad t\in R,$$

in cui $M_1L_1 = L_1M_1$. Inoltre, se $x\in N(M_1)\cap N(L_1)$, allora $(cM+L)^{-1}(cM+L)x = 0 = x$. Dunque, $N(M_1)\cap N(L_1) = \{0\}$ e si può quindi applicare il Teorema 2.

Ora, il fatto che per almeno un $c\in\mathbf{C}$, $cM+L$ è invertibile, è *equivalente* alla seguente proprietà di unicità:

l'equazione $Mu' + Lu = 0$ ha una unica soluzione in corrispondenza a condizioni iniziali consistenti.

Osservazione. Poiché $\det(cM+L) = 0$ è un'equazione polinomiale di grado $\leq n$, essa o ha un numero finito di soluzioni o non ne ha alcuna.

Il seguente Teorema stabilisce il risultato conclusivo.

Teorema 3. Sia $c\in\mathbf{C}$ tale che $cM+L$ ha inverso. Sia $k = \operatorname{Ind}((cM+L)^{-1}M) = \operatorname{Ind}(M_1)$, $L_1 = (cM+L)^{-1}L$. Allora la soluzione generale dell'equazione (1) è data per $f\in C^{(k)}$, da

$$e^{-M_1^DL_1t}\, M_1M_1^Dq + M_1^D\, e^{-M_1^DL_1t}\int_a^t e^{M_1^DL_1s}\, f_1(s)ds\, +$$

$$+ (1-M_1M_1^D) \sum_{n=0}^{k-1} [\, M_1L_1^D\,]^n\, L_1^D\, f_1^{(n)}(t),$$

dove $f_1(t) = (cM+L)^{-1}\, f(t)$, $q\in\mathbf{C}^n$.

Quindi, il problema (1) ha soluzione se e solo se

$$u_o = M_1 M_1^D q + (1-M_1 M_1^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n [M_1 L_1^D]^n L_1^D f_1^{(n)}(0), \; a = 0.$$

## 6. La (1) IN UNO SPAZIO DI BANACH, $\lambda = 0$ singolarità polare di M.

La trattazione di S.L. Campbell può essere estesa agli spazi di Banach, facendo ricorso alla teoria dovuta essenzialmente a Taylor.

Consideriamo dunque il problema (1), dove M, L sono operatori limitati dal Banach complesso E in sé. Assumiamo che $\lambda = 0$ è una singolarità polare di M e che M ed L commutano.

Inoltre, assumeremo che esiste l'inverso cM+L per almeno un $c \in \mathbf{C}$. Quindi, non è restrittivo assumere che L stesso sia invertibile. Posto

$$B_{-1} = (2\pi i)^{-1} \int_{|\lambda|=\varepsilon} (\lambda - M)^{-1} d\lambda$$

$P = B_{-1}$ riesce una proiezione su $N(M^n)$ $(B_{-1}^2 = B_{-1})$, $\forall n \geq m$, dove m è l'ordine del polo $\lambda = 0$. Inoltre,

$$E = N(M^n) \oplus R(M^n), \quad \forall n \geq m .$$

Allora l'equazione in (1) equivale a

(9) $$M \frac{d}{dt} Pu + L\, Pu = Pf,$$

(10) $$M \frac{d}{dt} (1-P)\, u + L(1-P)u = (1-P)\, f$$

Si vede facilmente che la restrizione di M a $R(M^m)$ risulta un isomorfismo su se stesso. Inoltre

$$PM(1-P)u = MP(1-P)u = 0, \quad PL(1-P)u = LP(1-P)u = 0$$

implica che la restrizione di L a $R(M^m)$ è limitata da $R(M^m)$ in sé.

Inoltre, poiché L è su E, dato $f \in R(M^m)$ esiste $u \in E$, $Lu = f$. Ma allora $Lu = (1-P)f$ e così

$$(1-P)\ Lu = (1-P)\ f = f = L(1-P)u$$

(Si ricordi che L e M commutano e quindi anche L e P). Così, la restrizione di L a $R(M^m)$ è un isomorfismo. Posto $M|_{R(M^m)} = M_1$, M è un isomorfismo da $R(M^m)$ su se stesso e così (10) è equivalente a

$$\frac{d}{dt}(1-P)u + M_1^{-1}L(1-P)u = M_1^{-1}(1-P)f$$

Tale equazione è regolare e non desta problemi. Resta da risolvere la (9). Assumendo f sufficiente regolare, se Pu soddisfa (9), allora (sfruttando ancora la commutatività di M e L),

$$\begin{aligned} M^2 \frac{d^2}{dt^2} Pu + LM \frac{d}{dt} Pu &= M \frac{d}{dt} Pf = MPf' \\ &= \frac{d^2}{dt^2} M^2 Pu + L\ [-\ LPu + Pf], \\ \frac{d^3}{dt^3} M^3 Pu &= L^3 Pu + M^2 Pf - \frac{d}{dt} LMPf + \frac{d^2}{dt^2} M^2\ Pf, \end{aligned}$$

ecc. Applicando successivamente $M \frac{d}{dt}$ arriviamo a

$$\frac{d^m}{dt^m} M^m Pu = 0 = (-1)^m\ L^m\ Pu + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{d^j}{dt^j} Pf$$

Per la invertibilità della restrizione di L a $R(M^m)$, si è così univocamente determinato Pu. Si vede poi che tale Pu risolve (9).

Osservazione. Se guardiamo bene la soluzione generale di (1) data nel § 5, ci rendiamo conto che P non altro che $1-MM^D$.

Se M e L non commutano, ma L è invertibile (o cM+L è invertibile per un $c \in \mathbf{C}$), il problema (1) viene mutato in

$$L^{-1}M\, u'(t) + u(t) = L^{-1} f(t), \quad t \in R$$

e si ottiene un'equazione in cui gli operatori commutano.

L'assunzione della singolarità polare di $\lambda = 0$, sarà allora che $\lambda = 0$ sia un polo di $(\lambda L + M)^{-1}$.

Osservazione. Invece di (1), con le tecniche precedenti si potrebbe considerare l'equazione astratta a coefficienti operatori

$$MBu + Lu = f$$

dove M,L,B sono operatori chiusi , per mezzo di convenienti ipotesi che leghino M, L e B. B può commutare o no con M, L (nel caso precedente B = = d/dt, ma può anche essere B = d/dt con condizione iniziale = 0, o $B = d^2/dt^2$ con condizione iniziale e finale u(0) = u(T) = 0, un problema ellittico).

BIBLIOGRAFIA

[1] S.L. CAMPBELL: Singular Systems of differential equations I, ed. Pitman, 1980.

[2] R.W. CARROL & R.E. SHOWALTER: Singular and degenerate Cauchy problems, ed. Academic Press, 1976.

[3] A. FAVINI: Abstract potential operators and spectral methods for a class of degenerate evolution problems, J. Diff. Eqn. 39(1981), 212-225.

[4] R.E. SHOWALTER: Hilbert space methods for partial differential equations, ed. Pitman, 1977.